

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

- a) Zeigen Sie für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ die Beziehung $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
b) Beweisen Sie damit für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ die Formel

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n x.$$

Hinweis: Benützen Sie a), führen Sie eine *Indexverschiebung* durch: $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$,
und verwenden Sie den binomischen Lehrsatz.

- Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n$ eine natürliche Zahl.

Hinweis: Induktion bietet sich hier nicht an, rechnen Sie stattdessen die Zahl mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes aus und schauen Sie sich die auftretenden Summanden genauer an.

- Die abgebildeten Bahnarten kommen aus Budapest. Links wurde nach dem alten Verfahren entwertet. Hierbei wurden bei der Entwertung zwei, drei oder vier Löcher in die Karte gestanzt. Das Stanzmuster änderte sich täglich. Der ungarische Mathematiker Ödön Vancso hat die Verwaltung darauf hingewiesen, daß man die Karten auch sammeln könne. Verfügt man über alle möglichen Fahrkarten, so legt man nur einen Streifen Papier in den Automat und sucht anschließend die passende bereits vorgestanzte Karte. Daraufhin wurde das System geändert; die neuen Automaten drucken das Datum und die Uhrzeit auf die Karten.



- Berechnen Sie die Anzahl aller möglichen Stanzmuster. Passen alle Karten schätzungsweise in einen Rucksack?
 - Wie viele Entwertungsmöglichkeiten würde es geben, wenn der Automat alle 9 Löcher beliebig stanzen könnte?
- In einer Einbahnstraße mit drei zunächst leeren Fahrspuren schaltet die Ampel auf Rot. Bis zur nächsten Grünphase kommen nacheinander 13 Autos an dieser Ampel zum Stehen.
 - Auf wie viele verschiedene Möglichkeiten können sich die 13 nacheinander eintreffenden Autos auf die drei Fahrspuren aufteilen, wenn die Autos i) unterschieden bzw. ii) nicht unterschieden werden?
 - Wie viele solcher Aufteilungen gibt es jeweils, wenn jeder Fahrer eine Fahrspur ansteuert, an der noch möglichst wenige Autos stehen?